Лекция (07 апреля 2020 года)

Задание:

1. **Изучить материал.**
2. **Составить письменный конспект.**
3. **Ответить на вопросы в конце конспекта**

Обозначения:

АВ – алгебра высказываний

ЛП – логика предикатов

$A(x)$, $F(x)$, $G(x, y)$ и т.д. (заглавные латинские буквы (F, G и т.д.) и скобки, внутри которых указаны предметы (строчные латинские буквы – x, y, z и т.д.) – предикаты (т.е. высказывания с выделением предметов)

A, B, H (заглавные латинские буквы) – переменные высказывания (т.е. высказывания без выделения предметов)

α, β (греческие строчные буквы) – некоторые формулы ЛП (используются, когда нам нужно знать только то, что данное выражение есть формула, а ее структура при этом не имеет значения).

4. ЛОГИКА ПРЕДИКАТОВ (продолжение)

4.4. Равносильные формулы логики предикатов

Знание равносильных формул очень удобно при решении практических задач и доказательства теорем, так как позволяет заменить формулу равносильной ей, которая имеет более простую структуру.

! В отличие от АВ, в ЛП в формулах выделяются объекты и предикаты, а все объекты относятся к предметным областям.

Поэтому в ЛП вводятся два понятия равносильности – «равносильность формул на области, к которой отнесены их предметы» и «просто равносильность», которая выполняется вне зависимости от того, на какой области определены предметы.

Две формулы α и β, отнесенные к некоторой предметной области Ω, которые при всех заменах переменных предикатов, переменных высказываний и свободных предметных переменных соответственно индивидуальными предикатами, определенными на Ω, индивидуальными высказываниями и индивидуальными предметами из Ω принимают одинаковые значения 1 или 0, называются *равносильными на области* Ω.

К примеру, на области Ω, содержащей только один предмет, равносильными будут формулы:

$$F(x),\ \forall x F(x),\ \exists x F(x).$$

Две формулы α и β, равносильные на любых предметных областях Ω, называются *просто равносильными*. Как и в АВ, такие (просто равносильные) формулы могут быть заменены одна другой.

Так как ЛП является расширением АВ, все законы равносильности АВ истинны и в этой системе. Очевидно, что все равносильности АВ будут верны, если в них вместо переменных высказываний подставить формулы логики предикатов. Например:

$\left(\overline{\exists x F(x)} \vee \exists x F(x)\right) = 1$ (получается из равносильности АВ: $\overline{A} \vee A = 1$);

$\left(F(x) \to \exists y G(y)\right) = \left(\overline{F(x)} \vee \exists y G(y)\right)$ (получается из равносильности АВ: $\left(A \to B\right) = \left(\overline{A} \vee B\right)$).

К ним добавляются равносильности, связанные с кванторами:

$$\overline{\forall x \alpha(x)} = \exists y \overline{\alpha(y)}; \qquad (4.1)$$

$$\overline{\exists x \alpha(x)} = \forall y \overline{\alpha(y)}. \qquad (4.2)$$

Таким образом, имеет место следующее правило: *знак отрицания можно ввести под знак квантора, заменив квантор на двойственный.*

П р и м е р 4.7. Преобразовать формулы $\exists x(A(x) \to \forall y B(y))$ и $\overline{\exists x(A(x) \to \forall y B(y))}$.

$$\exists x(A(x) \to \forall y B(y)) \overset{(2.21)}{=} \exists x(\overline{A(x)} \vee \forall y B(y)).$$

$$\overline{\exists x(A(x) \to \forall y B(y))} \overset{(4.2)}{=} \forall x \overline{(A(x) \to \forall y B(y))} \overset{(2.21)}{=} \forall x \overline{(\overline{A(x)} \vee \forall y B(y))} \overset{(2.10),(2.1)}{=}$$

$$= \forall x(A(x) \,\&\, \overline{\forall y B(y)}) \overset{(4.1)}{=} \forall x(A(x) \,\&\, \exists y \overline{B(y)}).$$

При этом были использованы следующие формулы:

(2.1) $\overline{\overline{X}} = X$	(2.10) $(X \vee X) = X$	(2.21) $\overline{X} \vee (X \,\&\, Y) = (\overline{X} \vee Y)$
(4.1) $\overline{\forall x \alpha(x)} = \exists y \overline{\alpha(y)}$	(4.2) $\overline{\exists x \alpha(x)} = \forall y \overline{\alpha(y)}$	

Теорема 4.1. *Имеют место следующие равносильности:*

$$\left(\forall x \alpha(x) \vee \beta\right) = \left(\forall x(\alpha(x) \vee \beta)\right); \qquad (4.3)$$

$$\left(\forall x \alpha(x) \,\&\, \beta\right) = \left(\forall x(\alpha(x) \,\&\, \beta)\right); \qquad (4.4)$$

$$\left(\exists x \alpha(x) \,\&\, \beta\right) = \left(\exists x(\alpha(x) \,\&\, \beta)\right); \qquad (4.5)$$

$$\left(\exists x \alpha(x) \vee \beta\right) = \left(\exists x(\alpha(x) \vee \beta)\right), \qquad (4.6)$$

где формула β не содержит свободной переменной x, а в формуле α, переменная x связана соответствующим квантором.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Докажем сначала равносильность (4.3):

$$\left(\forall x \alpha(x) \vee \beta\right) = \left(\forall x(\alpha(x) \vee \beta)\right).$$

1. Предположим, что формула $\left(\forall x \alpha(x) \vee \beta\right)$ истинна для некоторой области Ω и при некоторых фиксированных заменах свободных переменных как предметных, так и предикатных, тогда

1) либо $\forall x \alpha(x) = 1$ при этих заменах,
2) либо $\beta = 1$.

В первом случае $\alpha(x)=1$ для каждого x, принадлежащего Ω. Но тогда $\left(\alpha(x)\vee\beta\right)=1$ для всякого x из Ω и, следовательно, $\forall x(\alpha(x)\vee\beta)=1$.

Во втором случае, если $\beta = 1$, то в области Ω

$$(\alpha(x)\vee\beta)=1 \text{ и } \forall x(\alpha(x)\vee\beta)=1$$

при данных заменах свободных переменных.

2. Предположим, что формула $\left(\forall x\alpha(x)\vee\beta\right)$ ложна для некоторой области Ω и при некоторых фиксированных заменах свободных переменных как предметных, так и предикатных:

$$\left(\forall x\alpha(x)\vee\beta\right)=0.$$

Тогда

$$\beta = 0 \text{ и } \forall x\alpha(x)=0.$$

Следовательно, существует такой элемент $x_0\in\Omega$, что $\alpha(x_0)=0$. Но для этого элемента ложной будет формула

$$\left(\alpha(x_0)\vee\beta\right)=0,$$

Следовательно, ложной также будет формула

$$\forall x(\alpha(x)\vee\beta)=0.$$

Таким образом, равносильность формул $\left(\forall x\alpha(x)\vee\beta\right)$ и $\left(\forall x(\alpha(x)\vee\beta)\right)$ доказана.

Аналогично доказываются и остальные равносильности (4.4)–(4.6). □

Теорема 4.2. *Имеют место следующие равносильности:*

$$\forall x\alpha(x)\,\&\,\forall x\beta(x)=\forall x\left(\alpha(x)\,\&\,\beta(x)\right); \tag{4.7}$$

$$\exists x\left(\alpha(x)\vee\beta(x)\right)=\exists x\alpha(x)\vee\exists x\beta(x), \tag{4.8}$$

где в формулах α и β, переменная x связана соответствующим квантором.

Доказательство. Докажем, что справедлива равносильность (4.7):

$$\forall x\alpha(x)\,\&\,\forall x\beta(x)=\forall x\left(\alpha(x)\,\&\,\beta(x)\right).$$

1. Если формулы $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ одновременно тождественно истинны:

$$\alpha(x) = 1 \text{ и } \beta(x) = 1, \qquad (*)$$

то будет и тождественно истинной их конъюнкция, т.е. формула

$$(\alpha(x)\ \&\ \beta(x)) = 1,$$

а также будет тождественно истинной формула

$$\forall x(\alpha(x)\,\&\,\beta(x))=1.$$

Кроме этого из соотношений (*) следует, что тождественно истинными будут следующие формулы:

$$\forall x\alpha(x) = 1,\ \forall x\beta(x) = 1$$

и их конъюнкция:

$$\left(\forall x\alpha(x)\,\&\,\forall x\beta(x)\right)=1$$

То есть в этом случае обе части равносильности (4.7) принимают значение 1.

2. Пусть теперь хотя бы одна из формул $\alpha(x)$ и $\beta(x)$, например $\alpha(x)$, будет не тождественно истинна:

$$\alpha(x) = 0.$$

Тогда будет не тождественно истинна и следующая формула

$$(\alpha(x)\&\beta(x)) = 0,$$

а поэтому ложными будут высказывания

$$\forall x\alpha(x) = 0, \quad (\forall x\alpha(x)\&\forall x\beta(x)) = 0, \quad \forall x(\alpha(x)\&\beta(x)) = 0.$$

То есть в этом случае обе части равносильности (4.5) принимают одинаковые, ложные, значения. Следовательно, равносильность (4.7) доказана.

Равносильность (4.8) доказывается аналогичным образом. □

! В заключение отметим, что формула $\forall x(\alpha(x)\vee\beta(x))$ *не равносильна* формуле $\forall x\alpha(x)\vee\forall x\beta(x)$, а формула $\exists x(\alpha(x)\&\beta(x))$ *не равносильна* формуле $\exists x\alpha(x)\&\exists x\beta(x)$, т.е.:

$$\forall x\alpha(x)\vee\forall x\beta(x) \neq \forall x(\alpha(x)\vee\beta(x))$$

$$\exists x\alpha(x)\&\exists x\beta(x) \neq \exists x(\alpha(x)\&\beta(x))$$

Если в этих случаях необходимо вынести кванторные операции за скобки, то можно воспользоваться следующим приемом:

1) заменить обозначение связанной предметной переменной на любую другую, не используемую в данной формуле, в кванторе и в формулах, входящих в область его действия

(например в формуле $\forall x\alpha(x)\vee\forall x\beta(x)$ – два квантора всеобщности, у каждого из которых своя область действия, тогда в формуле $\forall x\beta(x)$ переменную x можно заменить переменной y, получится формула $\forall x\alpha(x)\vee\forall y\beta(y)$), равносильная исходной, т.е.:

$$\forall x\alpha(x)\vee\forall x\beta(x) = \forall x\alpha(x)\vee\forall y\beta(y))$$

2) последовательно использовать одну из формул (4.3)–(4.6).

Следовательно, справедливы будут следующие равносильности:

$$\big(\forall x\alpha(x)\vee\forall x\beta(x)\big)=\big(\forall x\alpha(x)\vee\forall y\beta(y)\big)\overset{(4.3)}{=}\big(\forall x(\alpha(x)\vee\forall y\beta(y))\big)\overset{(4.3)}{=}\forall x\forall y(\alpha(x)\vee\beta(y)); \qquad (4.9)$$

$$\big(\exists x\alpha(x)\,\&\,\exists x\beta(x)\big)=\big(\exists x\alpha(x)\,\&\,\exists y\beta(y)\big)\overset{(4.5)}{=}\big(\exists x(\alpha(x)\,\&\,\forall y\beta(y))\big)\overset{(4.5)}{=}\exists x\exists y(\alpha(x)\,\&\,\beta(y)). \qquad (4.10)$$

Пример 4.8. С помощью равносильных преобразований, привести формулу

$$\forall x\exists yP(x,y)\vee\overline{\exists x\forall yQ(x,y)}$$

к виду, в котором все операции связывания кванторами находятся вне скобок.

$$\forall x\exists yP(x,y)\vee\overline{\exists x\forall yQ(x,y)}\overset{(4.1),(4.2)}{=}\forall x\exists yP(x,y)\vee\forall x\exists y\overline{Q(x,y)}\overset{(4,9)}{=}$$
$$=\forall x\forall z(\exists yP(x,y)\vee\exists yQ(z,y))\overset{(4.8)}{=}\forall x\forall z\exists y(P(x,y)\vee Q(z,y))$$

4.5. Приведенные и нормальные формулы

Приведенными формулами называются формулы, в которых используются только операции конъюнкции, дизъюнкции и отрицания, причем знак отрицания относится только к элементарным предикатам и высказываниям.

Теорема 4.3. *Для каждой формулы существует равносильная ей приведенная формула.* □

Приведенная формула, равносильная формуле α, называется *приведенной формой* формулы α. В примере 4.7 обе формулы были преобразованы к приведенным формам.

Для облегчения анализа сложных суждений формулы ЛП рекомендуется приводить к нормальной форме. Если в АВ приняты две нормальные формы (ДНФ – дизъюнктивная и КНФ – конъюнктивная), то в ЛП – одна предваренная нормальная форма (ПНФ), суть которой сводится к разделению формулы на две части: кванторную и безкванторную.

Приведенная форма формулы α называется *предваренной нормальной формой* (*ПНФ*) формулы α, если она не содержит кванторов или если при образовании ее из элементарных формул операции связывания квантором следуют за всеми операциями алгебры высказываний.

В записи ПНФ кванторы, если они есть, предшествуют всем остальным символам. Например, приведенная формула

$$\forall x_1 \forall x_2 \exists x_3 \forall x_4 \alpha(x_1, x_2, x_3, x_4)$$

нормальна, если $\alpha(x_1, x_2, x_3, x_4)$ не содержит кванторов.

Теорема 4.4. *Для каждой формулы существует равносильная ей ПНФ.*

Доказательство. Докажем теорему по индукции, следуя закону построения формул логики предикатов. Для элементарных формул, представляющих собой либо буквы A, B, …, либо элементарные предикаты ($F(x)$, $G(x, y)$ и т.п.), утверждение истинно, так как они не содержат кванторов.

Предположим, что для формул α_1 и α_2 имеются ПНФ, соответственно, α_1^* и α_2^*. Пусть например,

$$\alpha_1^* = \forall x_1 \forall x_2 \ldots \exists x_i \ldots \exists x_n \beta_1(x_1, \ldots, x_n),$$
$$\alpha_2^* = \exists y_1 \forall y_2 \ldots \forall y_m \beta_2(y_1, \ldots, y_m).$$

Предположим, что переменные x_i не входят в формулу α_2^*, а y_i – в α_1^* (при переименовании связанной переменной формула остается равносильной исходной).

Любая формула ЛП получается из элементарных формул с помощью операций конъюнкции, дизъюнкции, отрицания и связывания квантором. Поэтому необходимо доказать, что все эти составные формулы можно привести к ПНФ.

Докажем, что для формулы $(\alpha_1 \vee \alpha_2)$ существует равносильная ей ПНФ. Заменим α_1 на равносильную ей ПНФ α_1^*, α_2 – на α_2^*. Получим формулу $(\alpha_1^* \vee \alpha_2^*)$, равносильную формуле $(\alpha_1 \vee \alpha_2)$. Преобразуем полученную формулу к ПНФ:

$$\overbrace{(\forall x_1 \forall x_2 \ldots \exists x_i \ldots \exists x_n \beta_1(x_1, \ldots, x_n))}^{\alpha_1^*} \vee \overbrace{(\exists y_1 \forall y_2 \ldots \forall y_m \beta_2(y_1, \ldots, y_m))}^{\alpha_2^*} \overset{(4.3)}{=}$$
$$= \forall x_1 (\forall x_2 \ldots \exists x_i \ldots \exists x_n \beta_1(x_1, \ldots, x_n) \vee \exists y_1 \forall y_2 \ldots \forall y_m \beta_2(y_1, \ldots, y_m)) \overset{(4.3),(4.6)}{=}$$
$$= \ldots = \forall x_1 \forall x_2 \ldots \exists x_i \ldots \exists x_n (\beta_1(x_1, \ldots, x_n) \vee \exists y_1 \forall y_2 \ldots \forall y_m \beta_2(y_1, \ldots, y_m)) \overset{(4.6)}{=}$$
$$= \forall x_1 \forall x_2 \ldots \exists x_i \ldots \exists x_n \exists y_1 (\beta_1(x_1, \ldots, x_n) \vee \forall y_2 \ldots \forall y_m \beta_2(y_1, \ldots, y_m)) \overset{(4.3),(4.6)}{=}$$
$$= \ldots = \forall x_1 \forall x_2 \ldots \exists x_i \ldots \exists x_n \exists y_1 \forall y_2 \ldots \forall y_m (\beta_1(x_1, \ldots, x_n) \vee \beta_2(y_1, \ldots, y_m)).$$

Таким образом получена ПНФ формулы, которая равносильна формуле $\alpha_1 \vee \alpha_2$.

Аналогичным образом при помощи равносильностей (4.4) и (4.5) можно построить ПНФ формулы, равносильной формуле $(\alpha_1 \& \alpha_2)$, если известны ПНФ формул α_1^* и α_2^*, которые равносильны α_1 и α_2, соответственно.

Докажем далее, что возможно получений ПНФ для формулы, представляющей собой отрицание какой-то формулы, представленной в виде ПНФ.

Пусть α^* – ПНФ формулы, равносильной формуле α, и пусть α^* имеет, например, вид

$$\forall x_1 \exists x_2 \exists x_3 \ldots \forall x_n \beta(x_1, \ldots, x_n).$$

Формула $\overline{\alpha^*}$ равносильна формуле $\overline{\alpha}$. Но формула $\overline{\alpha^*}$, в свою очередь, с учетом равносильностей (4.1) и (4.2) ($\overline{\forall x \alpha(x)} = \exists y \overline{\alpha(y)}$ и $\overline{\exists x \alpha(x)} = \forall y \overline{\alpha(y)}$), равносильна формуле

$$\exists x_1 \forall x_2 \forall x_3 \ldots \exists x_n \overline{\beta(x_1, \ldots, x_n)},$$

которая является ПНФ формулы.

Итак, зная ПНФ формулы, равносильной α, мы можем построить ПНФ формулы, равносильной $\overline{\alpha}$.

Докажем теперь, что возможно получений ПНФ для формулы, образованной из ПНФ-формулы с помощью операции связывания квантором.

Рассмотрим формулы, полученные с помощью связывания квантором. Формула $\forall x\alpha^*(x)$, очевидно, равносильна формуле $\forall x\alpha(x)$, а формула $\exists x\alpha^*(x)$ равносильна формуле $\exists x\alpha(x)$. Но формулы $\forall x\alpha^*(x)$ и $\exists x\alpha^*(x)$ представлены в виде ПНФ.

Итак, для элементарных формул существуют равносильные им ПНФ формул. Если формула α получена с помощью операций конъюнкции, дизъюнкции, отрицания и связывания квантором из формул, для которых существуют равносильные им ПНФ, то и для α существует равносильная ей ПНФ.

Но так как каждая формула ЛП получается из элементарных формул с помощью указанных операций, тогда для каждой формулы ЛП существует равносильная ей ПНФ. □

Пример 4.9. Преобразовать формулу $\overline{\exists x(A(x)\to\forall yB(y))}$ к ПНФ.

$$\overline{\exists x(A(x)\to\forall xB(x))} \overset{(4.2)}{=} \forall x\overline{(A(x)\to\forall xB(x))} \overset{(2.27)}{=}$$

$$=\forall x\overline{(\overline{A(x)}\vee\forall xB(x))} \overset{(2.8),(2.1)}{=} \forall x(A(x)\,\&\,\overline{\forall xB(x)}) \overset{(4.1)}{=} \forall x(A(x)\,\&\,\exists x\overline{B(x)})=$$
$$=\forall x(A(x)\,\&\,\exists y\overline{B(y)})=\forall x\exists y(A(x)\,\&\,\overline{B(y)}).$$

Использованные формулы:

(2.1) $\overline{\overline{X}}=X$ (2.8) $\overline{(X\vee Y)}=\overline{X}\,\&\,\overline{Y}$ (2.27) $(X\to Y)=(\overline{X}\vee Y)$

(4.1) $\overline{\forall x\alpha(x)}=\exists y\overline{\alpha(y)}$ (4.2) $\overline{\exists x\alpha(x)}=\forall y\overline{\alpha(y)}$

Вопросы для самопроверки:

1. *Какие две формулы логики предикатов называются равносильными на области Ω?*
2. *Какие две формулы называются просто равносильными?*
3. *Какие из следующих пар формул, с учетом соотношений (4.3)–(4.6), являются равносильными:*

$$\forall x\big[F(x)\,\&\,G(y)\big]\vee H(z,w) \quad u \quad \forall x\Big[\big(F(x)\,\&\,G(y)\big)\vee H(z,w)\Big];$$

$$\forall x\big[F(x)\to\exists yG(y)\big]\vee H(z,w) \quad u \quad \forall x\Big[\big(F(x)\to\exists yG(y)\big)\vee H(z,w)\Big];$$

$$\forall x\big[F(x)\vee G(y)\big]\,\&\,H(z,w) \quad u \quad \forall x\Big[\big(F(x)\vee G(y)\big)\,\&\,H(z,w)\Big];$$

$$\forall x\Big[F(x)\vee\overline{G(y)}\Big]\,\&\,H(z,w) \quad u \quad \forall x\Big[\Big(F(x)\vee\overline{G(y)}\Big)\,\&\,H(z,w)\Big];$$

$$\exists x\Big[\overline{F(x)\,\&\,G(y)}\Big]\vee H(z,w) \quad u \quad \exists x\Big[\Big(\overline{F(x)\,\&\,G(y)}\Big)\vee H(z,w)\Big];$$

$$\exists x\big[F(x)\to\exists yG(y)\big]\,\&\,H(z,w) \quad u \quad \exists x\Big[\big(F(x)\to\exists yG(y)\big)\,\&\,H(z,w)\Big].$$

4. *Какие формулы называются приведенными?*
5. *Существуют ли формулы, которые невозможно привести к приведенной форме?*
6. *С помощью соотношений (4.3)–(4.10) приведение данную формулу к ПНФ:*

$$\forall x\exists yP(x,y)\,\&\,\overline{\exists x\forall yQ(x,y)}.$$